वियोज्य *DETACHABLE*

CS (Main) Exam, 2020

गणित (प्रश्न-पत्र II)
MATHEMATICS (Paper II)

निर्धारित समय : तीन घण्टे	*अधिकतम अंक : 250*
Time Allowed : Three Hours	*Maximum Marks : 250*

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH.**

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए कि S_3 व Z_3 क्रमशः 3 प्रतीकों का क्रमचय समूह एवं मॉड्यूल 3 अवशिष्ट वर्गों के समूह हैं। दर्शाइए कि S_3 का Z_3 में तुच्छ समाकारिता के अतिरिक्त कोई भी समाकारिता नहीं है।

Let S_3 and Z_3 be permutation group on 3 symbols and group of residue classes module 3 respectively. Show that there is no homomorphism of S_3 in Z_3 except the trivial homomorphism. 10

1.(b) मान लीजिए R मुख्य गुणजावली प्रान्त है। दर्शाइए कि R के विभाग-वलय की प्रत्येक गुणजावली, मुख्य गुणजावली है तथा R/P, R के अभाज्यगुणजावली P के लिए मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

Let R be a principal ideal domain. Show that every ideal of a quotient ring of R is principal ideal and R/P is a principal ideal domain for a prime ideal P of R. 10

1.(c) सिद्ध कीजिए कि शर्त
$|a_{n+1}-a_n| \leqslant \alpha |a_n - a_{n-1}|$, जहाँ पर $0<\alpha<1$ को सभी प्राकृतिक संख्याओं $n \geqslant 2$ के लिए सन्तुष्ट करने वाला अनुक्रम (a_n), कॉशी-अनुक्रम होता है।

Prove that the sequence (a_n) satisfying the condition
$|a_{n+1}-a_n| \leqslant \alpha |a_n - a_{n-1}|$, $0<\alpha<1$ for all natural numbers $n \geqslant 2$, is a Cauchy sequence. 10

1.(d) समाकल $\int_C (z^2+3z)dz$ का, $(2, 0)$ से $(0, 2)$ तक वक्र C के वामावर्त अनुगत जहाँ पर C वृत्त $|z|=2$ है, मान निकालिए।

Evaluate the integral $\int_C (z^2+3z)dz$ counterclockwise from $(2, 0)$ to $(0, 2)$ along the curve C, where C is the circle $|z|=2$. 10

1.(e) यू.पी.एस.सी. के रखरखाव विभाग ने भवन में पर्दों की आवश्यकता-पूर्ति हेतु पर्दा-कपडे के पर्याप्त संख्या में टुकड़े खरीदे हैं। प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई 17 फुट है। पर्दों की लम्बाई के अनुसार आवश्यकता निम्नलिखित है :

पर्दे की लम्बाई (फुटों में)	आवश्यक संख्या
5	700
9	400
7	300

टुकडों एवं सभी पर्दों की चौड़ाइयाँ समान हैं। विभिन्न रूप से काटे गये टुकड़ों की संख्या का निर्णय इस प्रकार करने हेतु कि कुल कटान-हानि न्यूनतम हो, एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का प्रामाणिक रूप में निर्धारण कीजिए। इसका एक आधारी सुसंगत हल भी दीजिए।

UPSC maintenance section has purchased sufficient number of curtain cloth pieces to meet the curtain requirement of its building. The length of each piece is 17 feet. The requirement according to curtain length is as follows :

Curtain length (in feet)	*Number required*
5	700
9	400
7	300

The width of all curtains is same as that of available pieces. Form a linear programming problem in standard form that decides the number of pieces cut in different ways so that the total trim loss is minimum. Also give a basic feasible solution to it. 10

2.(a) मान लीजिए G, n समूहांक का परिमित चक्रीय समूह है । तब सिद्ध कीजिए कि G के $\phi(n)$ जनक हैं (जहाँ पर ϕ ऑयलर ϕ-फलन है) ।

Let G be a finite cyclic group of order n. Then prove that G has $\phi(n)$ generators (where ϕ is Euler's ϕ-function). 15

2.(b) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \sin x^2$ अंतराल $[0, \infty[$ पर एकसमान संतत नहीं है ।

Prove that the function $f(x) = \sin x^2$ is *not* uniformly continuous on the interval $[0, \infty[$. 15

2.(c) कन्टूर समाकलन का उपयोग कर, समाकल $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin\theta} d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Using contour integration, evaluate the integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin\theta} d\theta$. 20

3.(a) मान लीजिए $R, p(>0)$ अभिलक्षण का एक परिमित क्षेत्र है । दर्शाइए कि $f(a) = a^p, \forall a \in R$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण $f: R \to R$ एकैक समाकारी है ।

Let R be a finite field of characteristic $p(>0)$. Show that the mapping $f: R \to R$ defined by $f(a) = a^p, \forall a \in R$ is an isomorphism. 15

3.(b) एकधा विंधि के द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

न्यूनतमीकरण कीजिए $z = -6x_1 - 2x_2 - 5x_3$

बशर्ते कि

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 14 \\ -4x_1 + 4x_2 + 10x_3 &\leq 46 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq 37 \\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1,\ x_3 &\geq 3 \end{aligned}$$

Solve the linear programming problem using simplex method :

Minimize $z = -6x_1 - 2x_2 - 5x_3$

subject to
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 14 \\ -4x_1 + 4x_2 + 10x_3 &\leq 46 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq 37 \\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1,\ x_3 &\geq 3 \end{aligned}$$
15

3.(c) यदि $u = \tan^{-1} \dfrac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$

तब दर्शाइए कि $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1 - 4 \sin^2 u) \sin 2u$

If $u = \tan^{-1} \dfrac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$

then show that $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1 - 4 \sin^2 u) \sin 2u$ 20

4.(a) यदि $v(r, \theta) = \left(r - \dfrac{1}{r}\right) \sin\theta$, $r \neq 0$,

तब विश्लेषिक फलन $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ज्ञात कीजिए ।

If $v(r, \theta) = \left(r - \dfrac{1}{r}\right) \sin\theta$, $r \neq 0$,

then find an analytic function $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ 15

4.(b) दर्शाइए कि $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log_e(1 + \sqrt{2})$

Show that $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log_e(1 + \sqrt{2})$ 15

4.(c) वोगेल की सन्निकटन विधि से निम्नलिखित परिवहन समस्या का आरंभिक आधारिक सुसंगत हल ज्ञात कीजिए । इस हल का उपयोग कर समस्या का इष्टतम हल एवं परिवहन लागत ज्ञात कीजिए ।

गन्तव्य
Destinations

उद्गम Sources	D_1	D_2	D_3	D_4	प्राप्यता Availability
S_1	10	0	20	11	15
S_2	12	8	9	20	25
S_3	0	14	16	18	10
माँग Demand	5	20	15	10	

Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem by Vogel's approximation method and use it to find the optimal solution and the transportation cost of the problem. 20

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) $z = y f(x) + x g(y)$ से स्वैच्छिक फलनों $f(x)$ व $g(y)$ का विलोपन कर आंशिक अवकल समीकरण बनाइए तथा इसकी प्रकृति (दीर्घवृत्तीय, अतिपरवलीय या परवलीय) $x>0, y>0$ क्षेत्र में इंगित कीजिए ।

Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary functions $f(x)$ and $g(y)$ from $z = y f(x) + x g(y)$ and specify its nature (elliptic, hyperbolic or parabolic) in the region $x>0, y>0$. 10

5.(b) दर्शाइए कि समीकरण : $f(x) = \cos\dfrac{\pi(x+1)}{8} + 0{\cdot}148x - 0{\cdot}9062 = 0$

का एक मूल अन्तराल $(-1, 0)$ में तथा एक मूल $(0, 1)$ में है । ऋणात्मक मूल की न्यूटन-रॉफसन विधि से दशमलव के चार स्थान तक सही गणना कीजिए ।

Show that the equation : $f(x) = \cos\dfrac{\pi(x+1)}{8} + 0{\cdot}148x - 0{\cdot}9062 = 0$

has one root in the interval $(-1, 0)$ and one in $(0, 1)$. Calculate the negative root correct to four decimal places using Newton-Raphson method. 10

5.(c) मान लीजिए $g(w, x, y, z) = (w + x + y)(x + \bar{y} + z)(w + \bar{y})$ एक बूलीय-फलन है । $g(w, x, y, z)$ का योगात्मक प्रसामान्य स्वरूप (कन्जंकटिव नार्मल फॉर्म) प्राप्त कीजिए । $g(w, x, y, z)$ को उच्च-पदों (मैक्स टर्म्स) के गुणन के रूप में भी व्यक्त कीजिए ।

Let $g(w, x, y, z) = (w + x + y)(x + \bar{y} + z)(w + \bar{y})$ be a Boolean function. Obtain the conjunctive normal form for $g(w, x, y, z)$. Also express $g(w, x, y, z)$ as a product of maxterms. 10

5.(d) आंशिक अवकल समीकरण :

$$(D^3 - 2D^2D' - DD'^2 + 2D'^3)z = e^{2x+y} + \sin(x - 2y);$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$$

को हल कीजिए ।

Solve the partial differential equation :

$$(D^3 - 2D^2D' - DD'^2 + 2D'^3)z = e^{2x+y} + \sin(x - 2y);$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$$ 10

5.(e) सिद्ध कीजिए कि त्रिभुजाकार पटल ABC का इसके तल में A से होकर जाने वाली किसी भी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व-आघूर्ण

$$\frac{M}{6}\left(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2\right)$$

है, जहाँ पर M पटल की संहति तथा β व γ क्रमशः B व C से अक्ष पर डाले गये लम्बों की लम्बाइयां हैं ।

Prove that the moment of inertia of a triangular lamina ABC about any axis through A in its plane is

$$\frac{M}{6}\left(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2\right)$$

where M is the mass of the lamina and β, γ are respectively the length of perpendiculars from B and C on the axis. 10

6.(a) आंशिक अवकल समीकरण :

$$(x-y)y^2\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)x^2\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)z$$

के वक्र : $xz=a^3$, $y=0$ को अपने ऊपर समाहित करने वाले समाकल पृष्ठ को ज्ञात कीजिए ।

Find the integral surface of the partial differential equation :

$$(x-y)y^2\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)x^2\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)z$$

that contains the curve : $xz=a^3$, $y=0$ on it. 15

6.(b) समीकरण निकाय :

$$\begin{aligned}4x+y+2z&=4\\3x+5y+z&=7\\x+y+3z&=3\end{aligned}$$

के हल के लिए गाउस-सीडल पुनरावर्ती क्रिया-विधि निर्धारित कीजिए तथा आरंभिक सदिश $X^{(0)}=0$ से प्रारंभ करके तीन बार पुनरावर्त कीजिए । यथातथ (बिल्कुल ठीक) हल भी निकालिए और पुनरावर्त हलों से तुलना कीजिए ।

For the solution of the system of equations :

$$\begin{aligned}4x+y+2z&=4\\3x+5y+z&=7\\x+y+3z&=3\end{aligned}$$

set up the Gauss-Seidel iterative scheme and iterate three times starting with the initial vector $X^{(0)}=0$. Also find the exact solutions and compare with the iterated solutions. 15

6.(c) एक कण जिसकी संहति m है, $x^2 + y^2 = R^2$, जहाँ पर R अचर है, द्वारा परिभाषित बेलन पर गति के लिए व्यवरोधित है । कण मूल बिन्दु की ओर लगे बल जो कण की मूल बिन्दु से दूरी r के अनुपाती है, से प्रतिबन्धित है । बल $\vec{F} = -k\vec{r}$, जहाँ पर k अचर है, से दिया गया है ।

By writing down the Hamiltonian, find the equations of motion of a particle of mass m constrained to move on the surface of a cylinder defined by $x^2 + y^2 = R^2$, R is a constant. The particle is subject to a force directed towards the origin and proportional to the distance r of the particle from the origin given by $\vec{F} = -k\vec{r}$, k is a constant. 20

7.(a) आंशिक अवकल समीकरण :

$$z = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y); \quad p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \; q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

का हल ज्ञात कीजिये जो कि x-अक्ष से गुजरता हो ।

Find the solution of the partial differential equation :

$$z = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y); \quad p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \; q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

which passes through the x-axis. 15

7.(b) क्षेत्रकलन के लिए

$$\int_0^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \alpha_3 f(1)$$

द्वारा उस सूत्र को ज्ञात कीजिए जो अधिकतम सम्भव घात के बहुपद के लिए यथातथ (बिल्कुल ठीक) हो । सूत्र का उपयोग $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^3}}$ का (दशमलव के तीन स्थानों तक सही) मूल्यांकन के लिए कीजिए ।

Find a quadrature formula

$$\int_0^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \alpha_3 f(1)$$

which is exact for polynomials of highest possible degree. Then use the formula to evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^3}}$ (correct up to three decimal places). 20

7.(c) एक द्विविमीय द्रव्य-प्रवाह का वेग विभव $\phi(x, y) = xy + x^2 - y^2$ द्वारा दिया गया है । इस प्रवाह का धारा-फलन ज्ञात कीजिए ।

A velocity potential in a two-dimensional fluid flow is given by $\phi(x, y) = xy + x^2 - y^2$. Find the stream function for this flow. 15

8.(a) लम्बाई l की कसकर खींची गई लचीली-पतली डोरी का एक सिरा मूल बिन्दु पर तथा दूसरा $x = l$ पर बंधा है। आरंभिक अवस्था में इसे $x = \frac{l}{3}$ बिन्दु से ऐसे खींचकर छोड़ा जाता है ताकि यह x-y तल में h ऊँचाई के त्रिभुज का आकार लेता है। किसी भी दूरी x तथा समय t, डोरी को विरामावस्था से छोड़ने के बाद, पर विस्थापन y को ज्ञात कीजिए।

डोरी में $\dfrac{\text{क्षैतिज तनाव}}{\text{डोरी की इकाई लम्बाई की संहति}} = c^2$ लीजिए।

One end of a tightly stretched flexible thin string of length l is fixed at the origin and the other at $x = l$. It is plucked at $x = \frac{l}{3}$ so that it assumes initially the shape of a triangle of height h in the x-y plane. Find the displacement y at any distance x and at any time t after the string is released from rest. Take, $\dfrac{\text{horizontal tension}}{\text{mass per unit length}} = c^2$.

20

8.(b) बिन्दुओं x_0, $x_0+\varepsilon$ तथा x_1 के सापेक्ष तीन-बिन्दु लेगरान्ज-अन्तर्वेशन बहुपद को लिखिए। तदुपरान्त limit $\varepsilon \to 0$ करने पर निम्नलिखित सम्बन्ध को स्थापित कीजिए :

$$f(x) = \frac{(x_1 - x)(x + x_1 - 2x_0)}{(x_1 - x_0)^2} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x_1 - x)}{(x_1 - x_0)} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)} f(x_1) + E(x)$$

जहाँ पर $E(x) = \frac{1}{6}(x - x_0)^2 (x - x_1) f'''(\xi)$ त्रुटि-फलन है और

न्यूनतम $(x_0, x_0+\varepsilon, x_1) < \xi <$ उच्चतम $(x_0, x_0+\varepsilon, x_1)$

Write the three point Lagrangian interpolating polynomial relative to the points x_0, $x_0+\varepsilon$ and x_1. Then by taking the limit $\varepsilon \to 0$, establish the relation

$$f(x) = \frac{(x_1 - x)(x + x_1 - 2x_0)}{(x_1 - x_0)^2} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x_1 - x)}{(x_1 - x_0)} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)} f(x_1) + E(x)$$

where $E(x) = \frac{1}{6}(x - x_0)^2 (x - x_1) f'''(\xi)$

is the error function and min.$(x_0, x_0+\varepsilon, x_1) < \xi <$ max.$(x_0, x_0+\varepsilon, x_1)$ 15

8.(c) $\frac{m}{2}$ शक्ति वाले दो स्रोत, बिन्दुओं $(\pm a, 0)$ पर स्थित हैं। दर्शाइए कि वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के किसी भी बिन्दु पर वेग y-अक्ष के समान्तर तथा y के व्युत्क्रमानुपाती है।

Two sources of strength $\frac{m}{2}$ are placed at the points $(\pm a, 0)$. Show that at any point on the circle $x^2 + y^2 = a^2$, the velocity is parallel to the y-axis and is inversely proportional to y. 15