PHKM–U–STS

सांख्यिकी (प्रश्न-पत्र–I)

निर्धारित समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़िए)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको स्पष्टतया निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

STATISTICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) दो घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ और $P(A|B) + P(B|A) = \frac{2}{3}$. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $P(A^c \cup B^c)$

(ii) $P(A|B^c) + P(B|A^c)$

Two events A and B are such that $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ and $P(A|B) + P(B|A) = \frac{2}{3}$.

Evaluate the following :

(i) $P(A^c \cup B^c)$ 5

(ii) $P(A|B^c) + P(B|A^c)$ 5

(b) मान लीजिए कि दो यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त प्रायिकता फलन

$$f(x, y) = \frac{xy^{x-1}}{3};\ x = 1, 2, 3 \text{ और } 0 < y < 1$$

है। निम्नलिखित का परिकलन कीजिए :

(i) $P\left(X \geq 2 \text{ और } Y \geq \frac{1}{2}\right)$

(ii) $P(X \geq 2)$

Suppose the joint probability function of two random variables X and Y is

$$f(x, y) = \frac{xy^{x-1}}{3};\ x = 1, 2, 3 \text{ and } 0 < y < 1$$

Compute the following :

(i) $P\left(X \geq 2 \text{ and } Y \geq \frac{1}{2}\right)$ 5

(ii) $P(X \geq 2)$ 5

(c) मान लीजिए कि $X_1, X_2, \cdots$ स्वतंत्र और सर्वसम बंटित यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है, जिसका माध्य (μ) और प्रसरण $(\sigma^2) < \infty$ है, तथा मान लीजिए कि $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ है। दर्शाइए कि यादृच्छिक चरों का अनुक्रम $\langle S_n \rangle$ दुर्बल बृहत् संख्या नियम (WLLN) का पालन नहीं करता है।

Let $X_1, X_2, \cdots$ is a sequence of independent and identically distributed random variables with mean (μ) and variance $(\sigma^2) < \infty$, and assume $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Show that WLLN does not hold for sequence $\langle S_n \rangle$ of random variables. 10

(d) एक अच्छे आकलक का मापदण्ड लिखिए। माना कि X_1, X_2 स्वतंत्र और सर्वसम बंटित (iid) $P(\lambda)$ यादृच्छिक चर हैं, तब दर्शाइए कि λ के आकलन के लिए $T = X_1 + X_2$ पर्याप्त है, जबकि $T = X_1 + 2X_2$ पर्याप्त नहीं है।

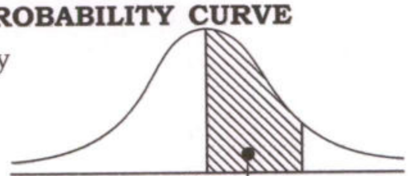
Write the criterion of a good estimator. Let X_1, X_2 be iid $P(\lambda)$ random variables, then show that $T = X_1 + X_2$ is sufficient while $T = X_1 + 2X_2$ is not sufficient for estimating λ. 10

(e) $H_0: \mu = 100$ विरुद्ध $H_1: \mu \neq 100$ के परीक्षण के लिए अज्ञात माध्य μ और प्रसरण 200 वाली एक प्रसामान्य समष्टि से आमाप 50 का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया है। यदि $\alpha = 0 \cdot 05$ है, तो क्रांतिक क्षेत्र प्राप्त कीजिए।

For testing $H_0: \mu = 100$ vs. $H_1: \mu \neq 100$, a random sample of size 50 is drawn from a normal population with unknown mean μ and variance 200. If $\alpha = 0 \cdot 05$, then obtain the critical region. 10

मानक प्रसामान्य प्रायिकता वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल

AREAS UNDER STANDARD NORMAL PROBABILITY CURVE



Standard normal probability curve is given by

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right), \quad -\infty < z < \infty$$

where $$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma_x} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

The following table gives the shaded area in the diagram, viz., $P(0 < Z < z)$ for different values of z :

z \ z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

2. *(a)* मान लीजिए कि दो यादृच्छिक चरों X तथा Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 < 2x < 3y < 6 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है। निम्नलिखित की गणना कीजिए :

(i) $E(Y | X = x)$

(ii) $E(\text{var}(Y | X = x))$

Let the joint probability density function of two random variables X and Y be

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 < 2x < 3y < 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Compute the following :

(i) $E(Y | X = x)$ 10

(ii) $E(\text{var}(Y | X = x))$ 10

(b) यादृच्छिक चर X का बंटन फलन प्राप्त कीजिए जिसका अभिलक्षण फलन

$$\phi(t) = e^{-t^2}, \ -\infty < t < \infty$$

है। इसके अलावा $\Phi(z)$ के संदर्भ में $P(X > 2\sqrt{2})$ की गणना भी कीजिए, जहाँ

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} d\theta$$

Find the distribution function of random variable X, for which the characteristic function is

$$\phi(t) = e^{-t^2}, \ -\infty < t < \infty$$

Also compute $P(X > 2\sqrt{2})$ in terms of $\Phi(z)$, where

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} d\theta$$ 15

(c) मान लीजिए कि $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ स्वतंत्र और सर्वसम बंटित (iid) $N(0, 1)$ विचर हैं। $\dfrac{\frac{X_1}{X_2} + \frac{X_3}{X_4} + \cdots + \frac{X_{2n-1}}{X_{2n}}}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$ का सीमान्त बंटन ज्ञात कीजिए।

Let $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ be iid $N(0, 1)$ variates. Find the limiting distribution of

$$\frac{\dfrac{X_1}{X_2}+\dfrac{X_3}{X_4}+\cdots+\dfrac{X_{2n-1}}{X_{2n}}}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$$ 15

3. *(a)* मान लीजिए कि, शून्य के सामीप्य में, यादृच्छिक चर X के आघूर्ण जनक फलन का अस्तित्व है और यदि

$$E(X^n)=\frac{1}{5}+(-1)^n\frac{2}{5}+\frac{2^{n+1}}{5}; \quad n=1, 2, 3, \cdots$$

है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $P(|X-0\cdot 75|\le 1\cdot 5)$

(ii) $P(|X-\mu|<\sigma)$; $\mu=E(X)$ और $\sigma^2=\text{var}(X)$

[प्रयोग कीजिए $\sqrt{1\cdot 84}=1\cdot 36$]

Let moment generating function of random variable X exist in the neighbourhood of zero and if

$$E(X^n)=\frac{1}{5}+(-1)^n\frac{2}{5}+\frac{2^{n+1}}{5}; \quad n=1, 2, 3, \cdots$$

then find the values of the following :

(i) $P(|X-0\cdot 75|\le 1\cdot 5)$ 10

(ii) $P(|X-\mu|<\sigma)$; $\mu=E(X)$ and $\sigma^2=\text{var}(X)$ 10

[Use $\sqrt{1\cdot 84}=1\cdot 36$]

(b) *(i)* क्रैमर-राव असमिका एवं राव-ब्लैकवेल प्रमेय के महत्त्व लिखिए।

(ii) मान लीजिए कि $X \sim B(1, \theta)$, तब $\theta(1-\theta)$ का एकसमान न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आकलक (UMVUE) निकालिए।

(i) Write the importance of Cramer-Rao inequality and Rao-Blackwell theorem. 5

(ii) Let $X \sim B(1, \theta)$, then find the uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE) of $\theta(1-\theta)$. 10

(c) चरघातांकी समष्टि

$$f(x;\alpha,\beta)=Ce^{-\beta(x-\alpha)},\ \alpha\le x<\infty,\ \beta>0$$

से लिए गए एक यादृच्छिक प्रतिदर्श के लिए α और β के अधिकतम संभाविता आकलक ज्ञात कीजिए।

Obtain the maximum likelihood estimates of α and β for a random sample from the exponential population

$$f(x;\alpha,\beta)=Ce^{-\beta(x-\alpha)},\ \alpha\le x<\infty,\ \beta>0$$ 15

4. *(a)* $H_0 : \mu = 0$ विरुद्ध $H_1 : \mu = 1$ के परीक्षण के लिए, $\alpha (= 0 \cdot 05)$ आमाप का शक्ततम परीक्षण प्राप्त कीजिए, जबकि 25 आमाप का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $N(\mu, 16)$ समष्टि से लिया गया है।

Find the most powerful test of size $\alpha (= 0 \cdot 05)$ for testing $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 : \mu = 1$, given a random sample of size 25 from $N(\mu, 16)$ population. 20

(b) एक प्रचय में कुछ दोषपूर्ण वस्तुएँ हैं। 25 वस्तुओं के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श में 6 दोषपूर्ण वस्तुएँ हैं, जिसकी प्रायिकता $p_1 = \theta$ है और 19 दोष रहित वस्तुएँ हैं, जिसकी प्रायिकता $p_2 = 1 - \theta$ है। तब निम्न का उपयोग करके θ का आकलन कीजिए :

(i) MLE विधि

(ii) न्यूनतम χ^2-विधि

(iii) आपरिवर्तित न्यूनतम χ^2-विधि

A lot consists of some defective items. A random sample of 25 items has 6 defective items with probability $p_1 = \theta$ and 19 non-defective items with probability $p_2 = 1 - \theta$. Then estimate θ using the following :

(i) MLE method

(ii) Minimum χ^2-method

(iii) Modified minimum χ^2-method 15

(c) मैन-ह्निटनी *U*-परीक्षण और विल्कॉक्सन चिह्न परीक्षण के बीच अंतर कीजिए। निम्नलिखित आँकड़े दो देखभाल कार्यक्रमों *A* और *B* में 15 गर्भवती महिलाओं के APGAR स्कोरों से सम्बन्धित हैं :

कार्यक्रम A :	8	7	6	2	5	8	7	3
कार्यक्रम B :	9	9	7	8	10	9	6	

क्या दोनों देखभाल कार्यक्रमों के अन्तर्गत गर्भवती महिलाओं के APGAR स्कोरों में सार्थक अन्तर है?

[दिया गया है, $U_{(0 \cdot 05)} = 10$]

Differentiate between Mann-Whitney *U*-test and Wilcoxon sign test. The following data pertain to APGAR scores of 15 pregnant women in two care programmes *A* and *B* :

Programme A :	8	7	6	2	5	8	7	3
Programme B :	9	9	7	8	10	9	6	

Is there a significant difference in APGAR scores of pregnant women under the two care programmes? 15

[Given, $U_{(0 \cdot 05)} = 10$]

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* आप एक रैखिक समाश्रयण निदर्श के प्राचलों को आकलित करने में न्यूनतम वर्गों के सिद्धान्त के उपयोग को कैसे उचित ठहरायेंगे? सामान्य संकेतनों के साथ दर्शाइए कि समाश्रयण निदर्श $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ के लिए $\underset{\sim}{\beta}$ का न्यूनतम वर्ग आकलक $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1} X' \underset{\sim}{y}$ है।

How will you justify the usage of the principle of least squares in estimating the parameters of a linear regression model? With usual notations, for the regression model $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, show that the least square estimator of $\underset{\sim}{\beta}$ is

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1} X' \underset{\sim}{y}$$

10

(b) (i) यदि $\underset{\sim}{X}$, $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ के रूप में बंटित है, तो $\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix}$ का बंटन प्राप्त कीजिए।

(ii) यदि X_1, X_2 और X_3 तीन चर हैं, तो X_3 के प्रभाव को समाप्त करते हुए X_1 और X_2 के बीच आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक, $\rho_{12\cdot3}$, के लिए व्यंजक, सरल सहसम्बन्ध गुणांकों के रूप में, प्राप्त कीजिए।

(i) If $\underset{\sim}{X}$ is distributed as $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, find the distribution of $\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix}$. 5

(ii) If X_1, X_2 and X_3 are three variables, obtain the expression for the partial correlation coefficient between X_1 and X_2 eliminating the effect of X_3, $\rho_{12\cdot3}$, in terms of simple correlation coefficients. 5

(c) X_1 और X_2, $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ से क्रमशः $(n_1 \times p)$ और $(n_2 \times p)$ कोटि के स्वतंत्र आँकड़ों के समुच्चय हैं। दर्शाइए कि $\dfrac{n_1 n_2 D^2}{n}$ का बंटन $T^2(p, n-2)$ के रूप में हुआ है, जहाँ $n = n_1 + n_2$ है और T^2 तथा D^2 क्रमशः होटेलिंग T^2 तथा महालानोबिस D^2 को निरूपित करते हैं।

X_1 and X_2 are independent data sets of order $(n_1 \times p)$ and $(n_2 \times p)$ respectively from $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$. Show that $\dfrac{n_1 n_2 D^2}{n}$ is distributed as $T^2(p, n-2)$, where $n = n_1 + n_2$, and T^2 and D^2 represent the Hotelling's T^2 and Mahalanobis D^2 respectively. 10

(d) समष्टि $U = \{a, b, c, d, e\}$ के लिए निम्नलिखित प्रतिचयन अभिकल्पना पर विचार कीजिए :

$$P(\{a, b, d\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{a, b, e\}) = \frac{1}{6},$$

$$P(\{a, d, e\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{b, c, d\}) = \frac{1}{6},$$

$$P(\{b, c, e\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{c, d, e\}) = \frac{1}{6}$$

प्रथम कोटि तथा द्वितीय कोटि की अंतर्वेश प्रायिकताओं की गणना कीजिए। अतः दर्शाइए कि यह एक स्तरित अभिकल्पना का मामला है। स्तरों को उनकी इकाइयों के साथ चिह्नित कीजिए।

For the population $U = \{a, b, c, d, e\}$, consider the following sampling design :

$$P(\{a, b, d\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{a, b, e\}) = \frac{1}{6},$$

$$P(\{a, d, e\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{b, c, d\}) = \frac{1}{6},$$

$$P(\{b, c, e\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{c, d, e\}) = \frac{1}{6}$$

Calculate the first-order and second-order inclusion probabilities. Hence show that it is a matter of a stratified design. Identify the strata with their units. 10

(e) मान लीजिए कि एक अभिकल्पना का आपतन आव्यूह

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

है। दर्शाइए कि—

(i) अभिकल्पना संबद्ध संतुलित है;

(ii) इसकी दक्षता कारक $E = \frac{8}{9}$ है।

Let the incidence matrix of a design be

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Show that—

(i) the design is connected balanced;

(ii) its efficiency factor is $E = \frac{8}{9}$. 6+4=10

6. (a) (X, Y) का द्विचर प्रसामान्य बंटन $BN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ है।

(i) दर्शाइए कि X और Y स्वतंत्र हैं, यदि और केवल यदि $\rho = 0$ है।

(ii) यदि (X, Y) का बंटन $BN\left(3, 1, 16, 25, \frac{3}{5}\right)$ है, तो $P(3 < Y < 8 \mid X = 7)$ निकालिए, दिया है $\Phi(2) = 0 \cdot 9772$ और $\Phi(-0 \cdot 25) = 0 \cdot 4017$ तथा $\Phi(x)$, $-\infty$ से x तक का मानक प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल दर्शाता है।

(iii) यदि (X, Y) का बंटन $BN(0, 0, 1, 1, 0)$ है, तो $Z = \frac{Y}{X}$ का बंटन क्या होगा?

(iv) जब $\underset{\sim}{X}$, $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ का अनुसरण करता है, तो (i) का बहुचर विस्तरण लिखिए।

(X, Y) has bivariate normal distribution $BN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

(i) Show that X and Y are independent if and only if $\rho = 0$. 6

(ii) If (X, Y) follows $BN\left(3, 1, 16, 25, \frac{3}{5}\right)$, obtain $P(3 < Y < 8 \mid X = 7)$, given $\Phi(2) = 0 \cdot 9772$ and $\Phi(-0 \cdot 25) = 0 \cdot 4017$, and $\Phi(x)$ represents the area under the standard normal curve from $-\infty$ to x. 6

(iii) If (X, Y) follows $BN(0, 0, 1, 1, 0)$, what will be the distribution of $Z = \frac{Y}{X}$? 4

(iv) State the multivariate extension of (i) when $\underset{\sim}{X}$ follows $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$. 4

(b) मुख्य घटकों और विहित सहसम्बन्ध को परिभाषित कीजिए। मुख्य घटकों का उपयोग करके कोई दत्त समानयन कैसे प्राप्त कर सकता है? यदि (X_1, X_2) का सहप्रसरण आव्यूह

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

है, तो मुख्य घटकों को ज्ञात कीजिए।

Define principal components and canonical correlation. How can one attain data reduction using principal components? If (X_1, X_2) has covariance matrix

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

then find the principal components. 15

(c) एक साधारण रैखिक समाश्रयण निदर्श $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ के लिए, जहाँ β_0 और β_1 प्राचल हैं तथा ε का माध्य 0 और प्रसरण σ^2 अज्ञात है, न्यूनतम वर्ग सिद्धान्त और अधिकतम संभाविता विधि से β_0 और β_1 के आकलक निकालिए। जाँच कीजिए कि क्या वे एकसमान हैं।

For the simple linear regression model $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, where β_0 and β_1 are parameters and ε has zero mean and an unknown variance σ^2, find the estimates of β_0 and β_1 by the principle of least squares as well as the method of maximum likelihood. Examine whether they are identical. 15

7. (a) एक बहुत बड़ी समष्टि को दो स्तरों में विभाजित किया गया है। नेमेन नियतन के अनुसार, दो स्तरों के लिए, आमाप n के स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्श की इकाइयों के नियतन n_1' और n_2' हैं और दूसरे प्रकार की नियतन विधि के अनुसार n_1 तथा n_2 हैं। $r = \frac{n_1'}{n_2'}$ तथा $\mu = \frac{n_1}{r n_2}$ को परिभाषित कीजिए। तब सिद्ध कीजिए कि नेमेन नियतन के अन्तर्गत स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन के सापेक्ष स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन की दक्षता

$$e = \frac{\mu (r+1)^2}{(\mu r + 1)(\mu + r)}$$

है।

A very big population is divided into two strata. The allocation of units of stratified random sample of size n for the two strata under Neyman allocation are n_1' and n_2', and under other type of allocation are n_1 and n_2. Define $r = \frac{n_1'}{n_2'}$ and $\mu = \frac{n_1}{r n_2}$. Then prove that the efficiency of stratified random sampling with respect to stratified random sampling under Neyman allocation is given by

$$e = \frac{\mu (r+1)^2}{(\mu r + 1)(\mu + r)}$$

20

(b) एक बैंक में इसके कम्प्यूटर की फाइलों में 40000 ग्राहक हैं, जिनको 4000 शाखाओं में बाँटा गया है, प्रत्येक शाखा ठीक 10 ग्राहकों का प्रबन्ध करती है। जिन ग्राहकों को बैंक का ऋण दिया गया है, उनके अनुपात का आकलन करने के लिए 40 शाखाओं का एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श चुना गया है। चुने गये प्रतिदर्श में से, प्रत्येक शाखा i के लिए ग्राहकों, जिन्होंने ऋण लिया है, उनकी एक सूची (A_i) तैयार की गई है; $i = 1, 2, \cdots, 40$ है। चयनित प्रतिदर्श से प्रेक्षित आँकड़े

$$\sum_{i=1}^{40} A_i = 200 \quad \text{और} \quad \sum_{i=1}^{40} A_i^2 = 1156$$

प्राप्त हुए हैं।

(i) यह किस प्रकार का प्रतिचयन है?

(ii) प्राचल जिसका आकलन करना है, उसके लिए व्यंजक (एक्सप्रेशन) लिखिए और उसका अनभिनत आकलक ज्ञात कीजिए।

(iii) भाग (ii) में प्राप्त अनभिनत आकलक के विचरण का आकलन कीजिए।

A bank has 40000 clients in its computer files, divided into 4000 branches, each managing exactly 10 clients. To estimate the proportion of clients for whom the bank has granted loan, a simple random sample of 40 branches is selected. From the selected sample, for each branch i, a list of clients (A_i) having a loan is prepared; $i = 1, 2, \cdots, 40$. The data observed from the selected sample are

$$\sum_{i=1}^{40} A_i = 200 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{40} A_i^2 = 1156$$

(i) What type of sampling is this? 3

(ii) State the expression of the parameter to estimate and obtain its unbiased estimate. 6

(iii) Estimate the variance of the unbiased estimator obtained in part (ii). 6

(c) (i) सत्यापित कीजिए कि क्या नीचे दिये गये BIBD संभव हैं :

(1) $v = b = 22,\ r = k = 7,\ \lambda = 2$

(2) $v = 10,\ b = 18,\ r = 9,\ k = 5,\ \lambda = 4$

दिया गया है कि अभिकल्पना वियोज्य है।

Verify whether the following BIBD are possible :

(1) $v = b = 22,\ r = k = 7,\ \lambda = 2$

(2) $v = 10,\ b = 18,\ r = 9,\ k = 5,\ \lambda = 4$

Given that the design is resolvable. 8

(ii) नीचे एक खंडक अभिकल्पना का आपतन आव्यूह (*N*) दिया गया है। समायोजित उपचार वर्गों के योग से संबद्ध स्वातंत्र्य-कोटियाँ और त्रुटि वर्गों के योग के लिए स्वातंत्र्य-कोटियाँ ज्ञात कीजिए :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Given below is the incidence matrix (*N*) of a block design. Find the degrees of freedom associated with the adjusted treatment sum of squares and the degrees of freedom for the error sum of squares :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7

8. *(a)* एक फसल की उपज विकसित करने के लिए एक 2^2-बहु-उपादानी अभिकल्पना का उपयोग किया गया है। दो घटकों A और B का उपयोग दो स्तरों, निम्न (–1) और उच्च (+1), पर किया गया है। प्रयोग को पूर्णतः यादृच्छिकीकृत तरीके से दो बार पुनरावर्तित किया गया है। प्राप्त आँकड़े इस प्रकार हैं :

घटक		*आकलित औसत प्रभाव*
A	*B*	
–	–	
+	–	8
–	+	–5
+	+	2

सभी उपजों के वर्गों का योग = 510·5

सभी उपजों का कुल योग = 50·00

(i) आँकड़ों का विश्लेषण कीजिए और महत्त्वपूर्ण घटकों की पहचान कीजिए।

(ii) समाश्रयण निदर्श विकसित कीजिए और जब A तथा B दोनों निम्न स्तर (–1) पर हों, तब उपज का पूर्वानुमान कीजिए।

[दिया गया है, $F_{(1,\ 4,\ 0\cdot05)} = 7\cdot71$]

A 2^2-factorial design was used to develop the yield of a crop. Two factors A and B were used at two levels : low (−1) and high (+1). The experiment was replicated two times with completely randomized way. The data obtained are as follows :

Factor		*Estimated Average Effect*
A	B	
−	−	
+	−	8
−	+	−5
+	+	2

The sum of squares of all the yields = 510·5

The grand total of all the yields = 50·00

(i) Analyze the data and identify the significant factors. 12

(ii) Develop the regression model and predict the yield when A and B both are at low level (−1). 8

[Given, $F_{(1,\ 4,\ 0\cdot 05)} = 7\cdot 71$]

(b) एक अभिलक्षण Y के समष्टि माध्य $\overline{Y}$ का आकलन करने के लिए, 1000 आमाप का एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श 1000000 आमाप की समष्टि में से प्रतिस्थापन रहित चुना गया है। सहायक अभिलक्षण X का समष्टि माध्य $\overline{X} = 15$ है। अन्य परिणाम नीचे दिये गये हैं :

$$s_y^2 = 20, \quad s_x^2 = 25, \quad s_{xy} = 15, \quad \overline{x} = 14, \quad \overline{y} = 10$$

(i) अन्तर, अनुपात और समाश्रयण आकलकों का उपयोग करते हुए $\overline{Y}$ का आकलन कीजिए।

(ii) इन आकलकों की MSE का आकलन कीजिए। $\overline{Y}$ का आकलन करने के लिए हमें कौन-सा आकलक चुनना चाहिए?

To estimate the population mean $\overline{Y}$ of a characteristic Y, a simple random sample of size 1000 was selected from a population of size 1000000 by without replacement. The population mean of an auxiliary character X is $\overline{X} = 15$. The other results are given below :

$$s_y^2 = 20, \quad s_x^2 = 25, \quad s_{xy} = 15, \quad \overline{x} = 14, \quad \overline{y} = 10$$

(i) Estimate $\overline{Y}$ using difference, ratio and regression estimators. 6

(ii) Estimate the MSE of these estimators. Which estimator should we choose to estimate $\overline{Y}$? 9

(c) मान्यताओं का उल्लेख करते हुए अन्योन्यक्रियाओं सहित द्विधा वर्गीकरण के विश्लेषण में उपयोग किये गये निदर्श को लिखिए। इसके सन्दर्भ में किन परिकल्पनाओं का परीक्षण किया जाता है? वर्गों के योग का व्यंजक प्राप्त कीजिए और ANOVA को पूर्ण कीजिए।

Write down the model used in the analysis of a two-way classification with interactions, stating the assumptions. What are the hypotheses tested in this scenario? Obtain the expression for the sum of squares and complete the ANOVA. 15

★ ★ ★