

1. (a) माना एक समूह G के दो उपसमूह H और K इस प्रकार हैं कि $o(H) > \sqrt{o(G)}$ और $o(K) > \sqrt{o(G)}$ हैं। दर्शाइए कि $H \cap K \neq \{e\}$ है, जहाँ e तत्समक अवयव है। यहाँ $o(H)$, $o(K)$ और $o(G)$ क्रमशः H , K और G की कोटि को दर्शाते हैं।

Let H and K be two subgroups of a group G such that $o(H) > \sqrt{o(G)}$ and $o(K) > \sqrt{o(G)}$. Show that $H \cap K \neq \{e\}$, where e is the identity element. Here $o(H)$, $o(K)$ and $o(G)$ denote the order of H , K and G respectively.

10

- (b) माना $G = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ एक अन्-आबेली समूह है तथा $o(x) = 3$ और $o(y) = 2$ हैं। दर्शाइए कि $xy = yx^2$ है (जहाँ e , समूह G का तत्समक अवयव है और $o(x)$, $o(y)$ क्रमशः अवयवों x , y की कोटि को दर्शाते हैं)।

Let $G = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ be a non-Abelian group with $o(x) = 3$ and $o(y) = 2$. Show that $xy = yx^2$ (where e is the identity element of G and $o(x)$, $o(y)$ denote the order of the elements x , y respectively).

10

- (c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ के निरपेक्षतः या सापेक्ष अभिसारी होने की जाँच कीजिए।

Examine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ is absolutely or conditionally convergent.

10

- (d) $1 < |z| < 3$ के लिए $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ का एक लौराँ श्रेणी में प्रसार कीजिए।

Expand $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ in a Laurent series valid for $1 < |z| < 3$.

1

- (e) समीकरण निकाय

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$$

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 10$$

के कितने आधारि हल हैं? उन सभी को ज्ञात कीजिए। उन आधारि हलों की संख्या भी ज्ञात कीजिए जो सुसंगत/असुसंगत/अनपध्रष्ट हैं।

How many basic solutions are there for the following system of equations?

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Find all of them. Furthermore, find the number of basic solutions, which are feasible/non-feasible/non-degenerate. 10

2. (a) कौशी अनुक्रम की परिभाषा दीजिए और सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम है। कौशी की शर्त का क्या महत्त्व है?

Define Cauchy sequence and prove that every convergent sequence of real numbers is a Cauchy sequence. What is the importance of Cauchy condition? 15

- (b) दर्शाइए कि पूर्णांकीय प्रांत $Z[i]$ में 3 एक अखंडनीय अवयव है।

Show that 3 is an irreducible element in the integral domain $Z[i]$. 15

- (c) कन्दूर समाकलन की विधि से सिद्ध कीजिए कि $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$ है।

Use the method of contour integration to prove that $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$. 20

3. (a) समाकल $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z+1)^3} dz$, $C: |z|=2$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate the integral $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z+1)^3} dz$, $C: |z|=2$. 15

- (b) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के अंतर्गत सबसे बड़े समकोणिक समांतरषट्फलक का आयतन $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ है।

Show that the volume of the greatest rectangular parallelopiped that can be inscribed in the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ is $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$. 20

(c) द्वैतता (ड्यूलिटी) के सिद्धान्त का उपयोग कर निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

$$\text{अधिकतमीकरण कीजिए } Z = 3x_1 + 4x_2$$

बशर्ते कि

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Apply the principle of duality to solve the following linear programming problem :

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 + 4x_2$$

subject to the constraints

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

15

4. (a) जाँचिए कि क्या $f(x) \in Z[x]$ के लिए $\phi(f(x)) = f(0)$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण $\phi: Z[x] \rightarrow Z$ एक समाकारिता है। निगमन कीजिए कि गुणजावली $\langle x \rangle$, $Z[x]$ में एक अभाज्य गुणजावली है, किन्तु $Z[x]$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है।

Examine whether the mapping $\phi: Z[x] \rightarrow Z$ defined by $\phi(f(x)) = f(0)$, for $f(x) \in Z[x]$, is a homomorphism. Deduce that the ideal $\langle x \rangle$ is a prime ideal in $Z[x]$, but not a maximal ideal in $Z[x]$.

15

- (b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सतत फलन रीमान समाकलनीय है।

Prove that every continuous function is Riemann integrable.

15

- (c) निम्न सारणी में प्रत्येक गोदाम में उपलब्ध सप्लाई, प्रत्येक बाजार की आवश्यकता और प्रत्येक गोदाम से प्रत्येक बाजार की इकाई परिवहन लागत की सभी आवश्यक जानकारी दी गई है :

		बाजार				
		I	II	III	IV	सप्लाई
गोदाम	A	5	2	4	3	22
	B	4	8	1	6	15
	C	4	6	7	5	8
आवश्यकता		7	12	17	9	

अनुभव के आधार पर शिपिंग क्लर्क ने निम्न अनुसूची (शेड्यूल) तैयार की है :

A से II पर 12 इकाई, A से III पर 1 इकाई, A से IV पर 9 इकाई, B से III पर 15 इकाई, C से I पर 7 इकाई और C से III पर 1 इकाई

इष्टतम अनुसूची और निम्नतम कुल परिवहन लागत ज्ञात कीजिए।

The following table shows all the necessary information on the available supply to each warehouse, the requirement of each market and the unit transportation cost from each warehouse to each market :

		Market				
		I	II	III	IV	Supply
Warehouse	A	5	2	4	3	22
	B	4	8	1	6	15
	C	4	6	7	5	8
Requirement		7	12	17	9	

The shipping clerk has worked out the following schedule from experience :

12 units from A to II, 1 unit from A to III, 9 units from A to IV, 15 units from B to III, 7 units from C to I and 1 unit from C to III

Find the optimal schedule and minimum total shipping cost.

20

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) समीकरण $(D^2 + DD' - 2D^2)z = y \sin x$, जहाँ $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ और $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ हैं, का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the equation $(D^2 + DD' - 2D^2)z = y \sin x$, where $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$.

10

- (b) निम्न रैखिक समीकरण निकाय को गाउस-सीडल विधि से हल कीजिए :

$$\begin{aligned} 10x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 20y - 2z &= -44 \\ -2x + 3y + 10z &= 22 \end{aligned}$$

Solve the following system of linear equations by Gauss-Seidel method :

$$\begin{aligned} 10x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 20y - 2z &= -44 \\ -2x + 3y + 10z &= 22 \end{aligned}$$

10

- (c) (i) संख्या $(3479)_{10}$ को द्वि-आधारी पद्धति और संख्या $(7AE \cdot 9F)_{16}$ को दशमलव पद्धति में बदलिए।

Convert the number $(3479)_{10}$ into binary system and the number $(7AE \cdot 9F)_{16}$ into decimal system.

- (ii) बूलीय फलन $F(x, y, z) = (x + y + z')(x' + y')$ के लिए सत्यमान सारणी ज्ञात कीजिए। सत्यमान सारणी से $F(x, y, z)$ का पूर्ण वियोजनीय प्रसामान्य रूप भी प्राप्त कीजिए।

Determine the truth table for the Boolean function

$$F(x, y, z) = (x + y + z')(x' + y')$$

Also derive the full disjunctive normal form of $F(x, y, z)$ from the truth table. 10

- (d) $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ द्वारा दिए गए एक चक्रज के रूप में एक घर्षणहीन तार पर m द्रव्यमान का एक मनका फिसलता है। लग्रांजी फलन ज्ञात कीजिए। अतः दर्शाइए कि गति का समीकरण

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g}{4a} u = 0$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ है।

A bead of mass m slides on a frictionless wire in the shape of a cycloid given by $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Find the Lagrangian function. Hence show that the equation of motion can be written as

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g}{4a} u = 0$$

where $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

4+6=10

- (e) बराबर सामर्थ्य के एक स्रोत और एक अभिगम एक निश्चित वृत्तीय सीमा $x^2 + y^2 = a^2$ के अंतर्गत बिंदुओं $\left(\pm \frac{a}{2}, 0\right)$ पर रखे हैं। दर्शाइए कि धारारेखाएँ

$$\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)(r^2 - 4a^2) - 4a^2 y^2 = ky(r^2 - a^2)$$

द्वारा दी जाती हैं, जहाँ k एक अचर है और $r^2 = x^2 + y^2$ है।

A source and a sink of equal strength are placed at points $\left(\pm \frac{a}{2}, 0\right)$ within a fixed circular boundary $x^2 + y^2 = a^2$. Show that the streamlines are given by

$$\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)(r^2 - 4a^2) - 4a^2 y^2 = ky(r^2 - a^2)$$

where k is a constant and $r^2 = x^2 + y^2$.

10

6. (a) एक आयताकार प्लेट के लिए $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ को परिसीमा प्रतिबन्धों

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x)$$

के अधीन हल कीजिए।

Solve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ for a rectangular plate subject to the boundary conditions

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x)$$

20

- (b) बूलीय फलन

$$F(x, y, z) = xyz + x'yz + xy'z + xyz'$$

का सरलीकरण कीजिए और संगत GATE परिपथ को रेखांकित कीजिए।

Simplify the Boolean function

$$F(x, y, z) = xyz + x'yz + xy'z + xyz'$$

and draw the corresponding GATE network.

15

- (c) द्रव्यमान M , त्रिज्या R और लम्बाई L के एक एकसमान ठोस बेलन का, बेलन के केन्द्र से होकर जाने वाले अक्षों के एक समुच्चय के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण की गणना कीजिए, जहाँ z -अक्ष, बेलन का अक्ष है और ρ , बेलन के किसी भी बिन्दु पर अचर घनत्व है। बेलन के एक दिए गए द्रव्यमान के लिए $\frac{L}{R}$, जिसके लिए x - या y -अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण न्यूनतम होगा, भी ज्ञात कीजिए।

Calculate the moment of inertia of a uniform solid cylinder of mass M , radius R and length L with respect to a set of axes passing through the centre of the cylinder, where z -axis is the axis of the cylinder and ρ is the constant density at any point of the cylinder. Also find $\frac{L}{R}$ for which the moment of inertia about x - or y -axis will be minimum for a given mass of the cylinder.

15

7. (a) $z(p^2 - q^2) = x - y$; $p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

Find the complete integral of $z(p^2 - q^2) = x - y$; $p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$.

15

(b) घात 2 या 2 से कम का वह अद्वितीय बहुपद, जो आँकड़ों

x	:	0	1	3
$f(x)$	:	1	3	55

पर ठीक बैठता है, ज्ञात कीजिए। रूडन त्रुटि पर परिबंध भी प्राप्त कीजिए।

Find the unique polynomial of degree 2 or less which fits the following data :

x	:	0	1	3
$f(x)$	:	1	3	55

Also obtain the bound on the truncation error.

15

(c) दर्शाइए कि अचर विस्कासिता के एक असंपीड्य अपरिवर्ती प्रवाह के लिए वेग घटक

$$u(y) = \left(\frac{U}{h}\right)y - \frac{hy}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$v = 0 = w$, $p = p(x)$ के साथ, पिंड बल की अनुपस्थिति में गति के समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। यह दिया गया है कि U , h और $\frac{dp}{dx}$ अचर हैं।

Show that for an incompressible steady flow with constant viscosity, the velocity components

$$u(y) = \left(\frac{U}{h}\right)y - \frac{hy}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$v = 0 = w$, with $p = p(x)$, satisfy the equation of motion in the absence of body force. Given that U , h and $\frac{dp}{dx}$ are constants.

20

8. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$p^2 + q^2 = 2; \quad p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

के अभिलक्षण (कैरेक्टरिस्टिक्स) ज्ञात कीजिए और $x = 0, z = y$ से होकर जाने वाला समाकल पृष्ठ (सर्फेस) प्राप्त कीजिए।

Find the characteristics of the partial differential equation

$$p^2 + q^2 = 2; \quad p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

and determine the integral surface which passes through $x = 0, z = y$.

15

(b) क्षेत्रकलन-सूत्र

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + ph^2(f'_0 - f'_1)$$

जहाँ $x_0 + h = x_1$, $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$ हैं और प्राइम ($'$), x के सापेक्ष अवकलज को निरूपित करता है, के लिए अचर p और त्रुटि-पद ज्ञात कीजिए। अतः समाकलन

$$\int_a^b f(x) dx, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

का मान ज्ञात करने के लिए संयुक्त नियम का निगमन कीजिए।

Find the constant p and error term for the quadrature formula

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + ph^2(f'_0 - f'_1)$$

where $x_0 + h = x_1$, $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$ and prime ($'$) represents derivative with respect to x . Hence deduce the composite rule for integrating

$$\int_a^b f(x) dx, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

15

(c) (i) विभव

$$V(r) = -\frac{k \cos \theta}{r^2}, \quad k \text{ अचर है}$$

के एक बल क्षेत्र में द्रव्यमान m का एक कण गतिमान है। गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ, ϕ) में हैमिल्टोनियन और हैमिल्टन का समीकरण ज्ञात कीजिए।

A particle of mass m moves in a force field of potential

$$V(r) = -\frac{k \cos \theta}{r^2}, \quad k \text{ is constant}$$

Find the Hamiltonian and the Hamilton's equations in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ) . 10

(ii) लagraंजी $L = m \dot{x} \dot{y} - m \omega_0^2 x y$, जहाँ m और ω_0 अचर हैं, का विचार कीजिए। हैमिल्टोनियन और गति का हैमिल्टन समीकरण ज्ञात कीजिए। तंत्र (सिस्टम) की पहचान बताइए।

Consider the Lagrangian

$$L = m \dot{x} \dot{y} - m \omega_0^2 x y$$

where m and ω_0 are constants. Find the Hamiltonian and Hamilton's equations of motion. Identify the system. 10

★ ★ ★